

Test blanc le lundi 15 novembre

10:15 – 12:00

CO1: étudiants 51-355

SG 0213: étudiants 1-50 et 356-368.

(Voir la liste d'étudiants et plans des salles CO1 et SG 0213 sur Moodle)

7 QCM + 4 VFF + 1 Question ouverte : 60 minutes

Sujets: cours 1-15., semaines 1-8.

Matériel: stylo à encre noire ou bleue foncée, crayon, gomme, correcteur blanc,
feuilles de brouillon

Aucun document ni aucun outil électronique n'est autorisé.

Le test ne comptera pas dans la note finale.

Rappel: Formes indéterminées $\infty - \infty, \frac{\infty}{\infty}, \frac{0}{0}, 0 \cdot \infty, 0^0, 1^\infty, \infty^0$ -126-

Ex 1. $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 2x} - x) = 1$
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + 2x} + x) = -1$

$\sqrt{x^2} = |x| \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Ex 2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(3x^2)}{x \tan x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(3x^2)}{3x^2} \cdot \frac{3x^2 \cos x}{x \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \underbrace{\frac{\ln(3x^2)}{3x^2}}_{\rightarrow 1} \cdot \frac{3x}{x} \cdot \underbrace{\frac{x}{\sin x}}_{\rightarrow 1} \cdot \underbrace{\cos x}_{\rightarrow 1} = 3$
 $\frac{0}{0}$

Propriétés des limites infinies

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \pm \infty$; $\lim_{x \rightarrow \pm \infty} f(x) = \pm \infty$

(1) Si $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \begin{matrix} +\infty \\ -\infty \end{matrix}$ et $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \begin{matrix} +\infty \\ -\infty \end{matrix} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x)) = \begin{matrix} +\infty \\ -\infty \end{matrix}$

(2) Si $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \pm \infty$, $g(x)$ est bornée au voisinage de $x_0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \pm g(x)) = \pm \infty$

Ex: $f(x) = \frac{1}{x^2}$; $g(x) = \sin \frac{1}{x} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} + \sin \frac{1}{x} \right) = +\infty$

(3) Si $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \underline{l \neq 0} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot g(x)) = \begin{matrix} +\infty \\ -\infty \end{matrix}$, si $l > 0$,
 $-\infty$, si $l < 0$

Ex: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x-1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \underbrace{(2x-1)}_{\rightarrow -1} \cdot \underbrace{\frac{1}{x^2}}_{\rightarrow +\infty} = -\infty.$

(4) Si $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \pm \infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = 0.$

(5) Si $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ et $f(x) \neq 0$ au voisinage de $x_0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = \begin{cases} +\infty, & \text{si } f(x) > 0 \forall x \text{ au voisinage de } x_0 \\ -\infty, & \text{si } f(x) < 0 \forall x \text{ au voisinage de } x_0 \\ \text{n'existe pas, autrement} \end{cases}$

Ex: $\lim_{x \rightarrow 0} (-x^2) = 0$ $\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{-x^2} = -\infty$
 $-x^2 < 0$ autour de 0

mais $\lim_{x \rightarrow 0} x = 0$ et $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x}$ n'existe pas

(6) „Gendarmes“ Si $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ et $g(x) \geq f(x) \forall x$ au voisinage de $x_0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = +\infty$
 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$ et $g(x) \leq f(x) \forall x$ au voisinage de $x_0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = -\infty$

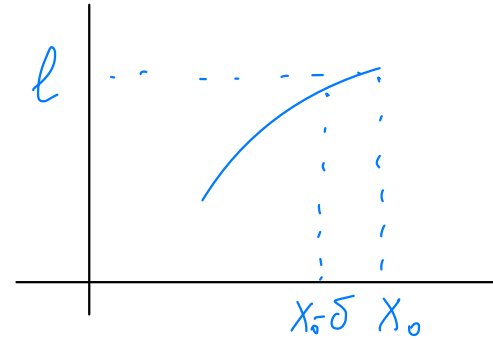
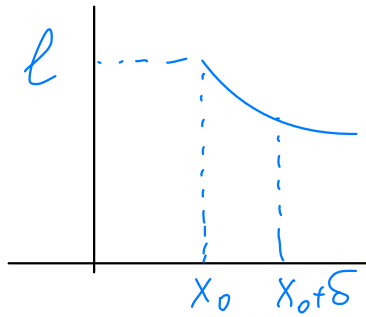
Les propriétés (1)-(6) sont toujours valables lorsque $x \rightarrow \pm \infty$.

Limites à droite et à gauche

Déf $f: E \rightarrow F$ est défini à droite (à gauche) de x_0 s'il existe $\alpha > 0$ tel que $]x_0, x_0 + \alpha[\subset E$ ($]x_0 - \alpha, x_0[\subset E$).

Déf $f: E \rightarrow F$ définie à droite (à gauche) de x_0 admet pour limite à droite (à gauche) de x_0 le nombre réel l si $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$:

$$\forall x \in E : 0 < x - x_0 \leq \delta \quad (0 < x_0 - x \leq \delta) \Rightarrow |f(x) - l| \leq \varepsilon.$$



Notation:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = l$$

à droite

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = l$$

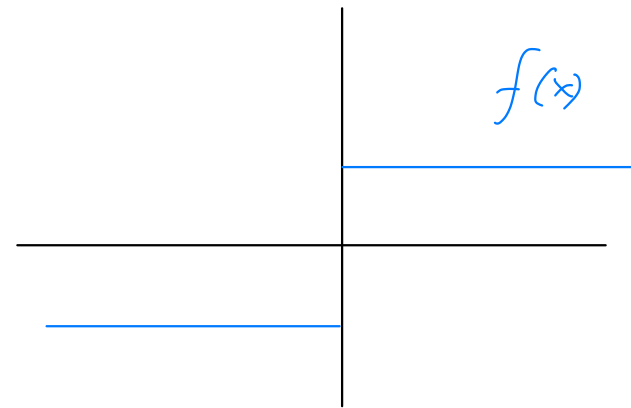
à gauche.

Remarque. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \iff \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = l \text{ et } \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = l.$

Ex. $f(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$

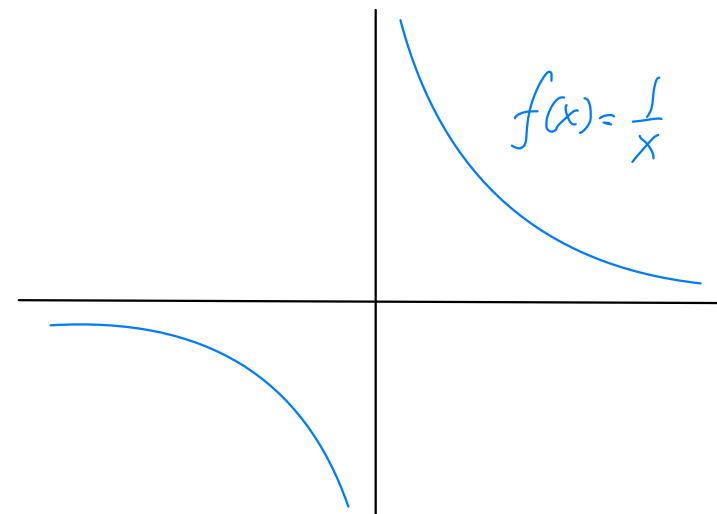
$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -1$

$\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ n'existe pas



Remarque. On peut aussi définir les limites $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \pm \infty, \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \pm \infty$

Ex. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty ; \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$



§4.3. Fonction exponentielle et logarithmique

-130-

Déf. $e^x \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ (Rappel: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ converge absolument $\forall x \in \mathbb{R}$ par le critère de d'Alembert:
 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{x^n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x|}{n+1} = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$)

Convention: $0^0 = 1, 0! = 1$ $\left(\binom{n}{0} = \frac{n!}{n!0!} \Rightarrow 0! = 1; \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \right|_{x=0} = 0^0 = 1.$

$$D(e^x) = \mathbb{R}$$

Proposition. (1) $e^{x+y} = e^x \cdot e^y \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$

$$(2) e^{-x} = \frac{1}{e^x} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$(3) e^x > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Exemple: m=3

$$\sum_{k+p=3} \frac{x^k}{k!} \cdot \frac{y^p}{p!} = \left(\frac{x^3}{3!} + \frac{x^2}{2!} \cdot \frac{y}{1} + \frac{x}{1} \cdot \frac{y^2}{2!} + \frac{y^3}{3!} \right)$$

Dém: (1) $e^x \cdot e^y = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \cdot \sum_{p=0}^{\infty} \frac{y^p}{p!} = \sum_{m=0}^{\infty} \left(\sum_{k+p=m} \frac{x^k}{k!} \cdot \frac{y^p}{p!} \right) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^m \frac{1}{k! (m-k)!} x^k y^{m-k}$

$\left(1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots \right) \left(1 + \frac{y}{1} + \frac{y^2}{2!} + \frac{y^3}{3!} + \dots \right)$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \sum_{k=0}^m \frac{m!}{k! (m-k)!} x^k y^{m-k} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} (x+y)^m \stackrel{(\text{def})}{=} e^{x+y}$$

$(x+y)^m$ - le binôme de Newton

-131-

$$(2) e^x e^{-x} \stackrel{(1)}{=} e^{x-x} = e^0 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{0^k}{k!} = \frac{0^0}{0!} = 1 \Rightarrow e^{-x} = \frac{1}{e^x} \Rightarrow e^x \neq 0 \forall x \in \mathbb{R}$$

$$(3) e^x \stackrel{(1)}{=} e^{\frac{x}{2}} \cdot e^{\frac{x}{2}} = \left(e^{\frac{x}{2}}\right)^2 \geq 0 \text{ et } e^x \stackrel{(2)}{\neq} 0 \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow \underline{e^x > 0} \forall x \in \mathbb{R}$$

Propriétés de la fonction $f(x) = e^x$

$$(1) \lim_{x \rightarrow \infty} e^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \underset{x > 0}{\geq} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{1} = +\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} e^x = +\infty.$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = \lim_{\substack{y = -x \\ y \rightarrow +\infty}} e^{-y} = \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{1}{e^y} = 0$$

$$(3) e^x \uparrow \forall x \in \mathbb{R}. \text{ Soit } x > y \Rightarrow e^{x-y} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x-y)^k}{k!} > \underset{(x-y) > 0}{1 + (x-y)} > 1$$

$$\Rightarrow e^x = e^y \cdot \underbrace{e^{(x-y)}}_{> 1, x > y} > e^y \quad \forall x > y$$

$\Rightarrow e^x: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ strictement croissante $\Rightarrow$ injective ($x > y \Rightarrow e^x > e^y$)
 surjective (à voir plus tard) $\Rightarrow$ bijective

Proposition.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

$k=0 \Rightarrow \frac{x^0}{0!} = 1$

Dém:

$$\left| \frac{e^x - 1}{x} - 1 \right| = \left| \frac{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} - 1}{x} - 1 \right| = \left| \frac{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k!}}{x} - 1 \right| = \left| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{k-1}}{k!} - 1 \right| =$$

$k=1 \Rightarrow \frac{x^0}{1!} = 1$

$$= \left| \sum_{k=2}^{\infty} \frac{x^{k-1}}{k!} \right| \leq \sum_{k=2}^{\infty} \frac{|x|^{k-1}}{k!} = |x| \sum_{k=2}^{\infty} \frac{|x|^{k-2}}{k!} < |x| \cdot e \xrightarrow{|x| \rightarrow 0} 0.$$

$\text{si } |x| < 1$

$\text{inégalité } \Delta$

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{|x|^{k-2}}{(k-2)!} = \sum_{h=0}^{\infty} \frac{|x|^h}{h!} \stackrel{(\text{def})}{=} e^{|x|} < e^1$$

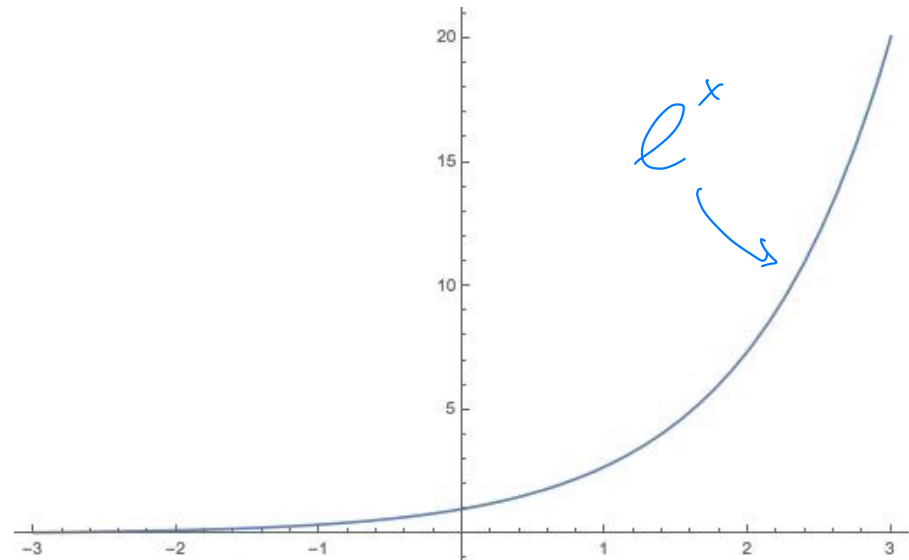
$\text{pour } |x| < 1$

$\Rightarrow$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{e^{t(x)} - 1}{t(x)} = 1 \quad \text{si } \lim_{x \rightarrow a} t(x) = 0$$

$t(x) \neq 0$ au voisinage de $x = a$



On a: $e^x: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ bijective $\Rightarrow$ on peut définir la fonction réciproque

Fonction logarithmique. (Logarithme naturel = logarithme népérien; John Napier)

$e^x: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ bijective $\Rightarrow \exists \log x: \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$, telle que

$$e^x = y \Leftrightarrow x = \log y \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in \mathbb{R}_+^*$$

Propriétés. (1) $e^{\log x} = x \quad \forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\log(e^x) = x \quad \forall x \in \mathbb{R}$ (fonctions réciproques)

$$(2) \log(x \cdot y) = \log x + \log y$$

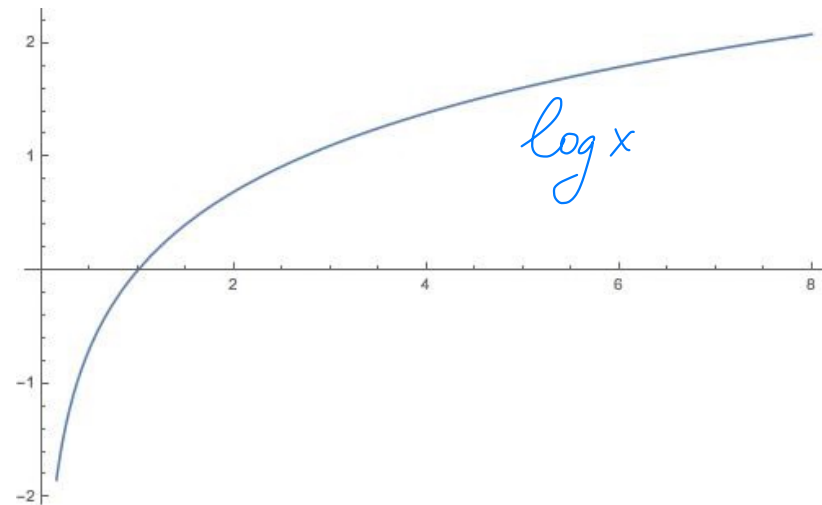
$$(3) \log\left(\frac{x}{y}\right) = \log x - \log y$$

$$(4) \log(x^r) = r \log x \quad \forall r \in \mathbb{N}^*$$

$$(5) \log(1) = 0, \quad \log(e) = 1 \quad e^0 = 1, e' = e$$

Dém: (2) $e^{\log x + \log y} = e^{\log x} \cdot e^{\log y} = x \cdot y =$
 $= e^{\log(x \cdot y)} \Rightarrow \log(x \cdot y) = \log x + \log y$
 puisque e^x est bijective.

(3) - (5) [DZ § 6.2]



Remarque $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = m$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = m.$

Ex. $\lim_{n \rightarrow \infty} (n! - \sqrt{(n!)^2 - n!}) \rightsquigarrow \lim_{x \rightarrow \infty} (x - \sqrt{x^2 - x}) =$
 Soit $x \rightarrow \infty$ $\infty - \infty$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\cancel{x^2} - \cancel{x^2} + x}{x + \sqrt{x^2 - x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\cancel{x}}{\cancel{x} (1 + \sqrt{1 - \frac{1}{x}})} = \frac{1}{2}$$

$\underbrace{|x| \sqrt{1 - \frac{1}{x}}}_{x > 0 \Rightarrow |x| = x} \quad \underbrace{\frac{1}{x}}_{> 0}$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(n!) = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \frac{1}{2} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (n! - \sqrt{(n!)^2 - n!}) = \frac{1}{2}.$$

puisque $\lim_{n \rightarrow \infty} n! = +\infty$